Stochastic Approach to Ihara Zeta Function (Algebraic number theory and related topics)

AUTHOR(S):

安田, 公美

数理解析研究所講究録 1451 巻 2005 年 42-50

Stochastic Approach to Ihara Zeta Function

九州大学大学院数理学研究院 安田 公美 (Kumi Yasuda)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 序

A. Selberg が示した Riemann 面上の Hilbert-Schmidt 作用素のスペクトルと素測地線の長さの間の関係を記述する跡公式は，のちに H. P. McKean によって Riemann 面上の Brown 運動の推移作用素に応用されることにより，Laplacian の固有値を用いて素測地線の長さの分布を記述する素測地線定理を生み出した．ここでは，実数体 $\mathbf{R}$ の代わりに p 進体 $\mathbf{Q}_p$ を考えることにより，p 進における Selberg の跡公式の類似を与え，それを Markov 過程の推移作用素に応用することにより，p 進素測地線定理を与える．また，伊原のゼータ関数の表示，関数等式，Riemann 予想 (の類似) の成立条件を与える．

2 p 進上半平面と跡公式

$p \neq 2$ を素数とし，$\mathbf{Q}_p$ の中の原始 $p-1$ 乗根のひとつをとり，ε とする．ε は $\mathbf{Q}_p$ の中に平方根をもたないので，$\mathbf{Q}_p$ にそのひとつの平方根 $\sqrt{\varepsilon}$ を添加して得られる 2 次拡大体 $K := \mathbf{Q}_p(\sqrt{\varepsilon})$ を考える．

次に，$\mathbf{Q}_p$ の元 y は K の元 $a+\sqrt{\varepsilon}b$, $a, b \in \mathbf{Q}_p$, が存在して $y = (a+\sqrt{\varepsilon}b)(a-\sqrt{\varepsilon}b)$ であるとき **positive** であるということにし，(2 次元) p **進上半平面** H を

$$H := \left\{x+\sqrt{\varepsilon}y \ ; \ x, y \in \mathbf{Q}_p,\ y \text{ は positive}\right\} \subset K$$

で定義する．$G := SL(2, \mathbf{Q}_p)/\pm I$ は H に

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \begin{array}{ccc} H & \to & H \\ \left(z \right. & \mapsto & \left. \frac{az+b}{cz+d} \right) \end{array}$$

により作用し，H は G の homogeneous space となる．$x+\sqrt{\varepsilon}y \in H$ に対し $\|x+\sqrt{\varepsilon}y\| := \max\{|x|_p, |y|_p\}$ とし，

$$d(z,w) := \cosh^{-1}\left(1+\frac{\|z-w\|^2}{2|y_z|_p|y_w|_p}\right), \quad z = x_z+\sqrt{\varepsilon}y_z, w = x_w+\sqrt{\varepsilon}y_w \in H,$$

と定義すると d は H 上の群 G の作用に関する不変距離を与え，その値域 Range(d) は可算集合 $\{r_n\}_{n\in\mathbf{Z}\cup\{-\infty\}}$，ただし，$r_{-\infty} := 0$, $n \in \mathbf{Z}$ のとき $r_n := \psi^{-1}(p^{2n})$, $\psi(r) := \exp(r)+\exp(-r)-2$，である．また，$H$ 上の G の作用に関する不変測度 μ が存在する．

G の部分群 Γ は，そのすべての元が対角行列と共役なとき，**双曲的**であるという．以下，Γ を G の双曲的不連続部分群とする．$\gamma \in \Gamma$ に対し，$\gamma = g_\gamma^{-1}\begin{pmatrix} a_\gamma & 0 \\ 0 & a_\gamma^{-1}\end{pmatrix} g_\gamma$, $g_\gamma \in G$, $a_\gamma \in \mathbf{Q}_p$, とおくと，$(p-1)/2$ の約数 h_γ と $b_\gamma \in \mathbf{Q}_p$, $|b_\gamma|_p > 1$, が存在して，γ の Γ における中心化群は

$$\Gamma_\gamma = \left\{ g_\gamma^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon^{kh_\gamma}b_\gamma^n & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-kh_\gamma}b_\gamma^{-n}\end{pmatrix} g_\gamma \,;\, 0 \le k \le \frac{p-1}{2h_\gamma}-1,\ n \in \mathbf{Z}\right\}$$

で与えられる．h_γ は γ から一意に定まる自然数，また，$b_\gamma \in \mathbf{Q}_p$ は必ずしも一意ではないが，そのノルム $|b_\gamma|_p =: p^{j_\gamma}$, $j_\gamma \in \mathbf{N}$, は γ から一意に与えられる．

H の開集合 $\mathcal{F}$ は次をみたすとき，Γ の**基本領域**であるという；

$$\gamma\mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{F}} = \phi, \quad \forall\gamma \in \Gamma,\ \gamma \ne I,$$
$$\cup_{\gamma\in\Gamma}\gamma\overline{\mathcal{F}} = H,$$

ただし，$\overline{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{F}$ の閉包を表す．

Proposition 1 任意の双曲的不連続部分群 $\Gamma \subset G$ に対して，高々可算個の半径 r_{-1} の球 $B_i^{(-1)}$, $i = 1,2,\ldots$, が存在して $\mathcal{F} = \cup_i B_i^{(-1)}$ (非交和) が Γ の基本領域を与える．

Γ の元 γ_0 は $\gamma_0 = \gamma^m$, $\exists\gamma \in \Gamma$, $\exists m \ge 2$, の形に表されないとき，**primitive** であるという．primitive な 2 元 γ_0 と γ_0' はそれぞれに共役な対角行列が torsion を除いて一致するとき，**同値**であるといい，$\gamma_0 \sim \gamma_0'$ と書くことにする．primitive な元 $\gamma_0 \in \Gamma$ に対し，$L(\gamma_0) := \inf_{z\in H} d(z, \gamma_0 z)$ を γ_0 に対応する**素測地線の長さ**と呼ぶことにすると，$L(\gamma_0) = \psi^{-1}(l(\gamma_0))$, $l(\gamma_0) \in p^{2\mathbf{Z}_+}$, と書ける．$L$ と l は 1 対 1 に対応するから，L の分布を調べることと l の分布を調べることは同等である．

Range(d) 上の非負連続関数 f であって，

$$\sum_{n\le -1} p^{2n} f(r_n)^2 < \infty, \quad \sum_{n\ge 0} p^{2n} f(r_n) < +\infty,$$

をみたすものが与えられたとする．このとき，$k(z,w) := \sum_{\gamma\in\Gamma} f(d(z,\gamma w))$, $z,w \in \mathcal{F}$, は $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 上一様に収束し，二乗可積分となる．k を核とする $\mathcal{F}$ 上の Hilbert-Schmidt 積分作用素

$$T\xi(\cdot) := \int_{\mathcal{F}} \xi(w)k(\cdot,w)\mu(dw), \quad \xi \in L^2(\mathcal{F},\mu),$$

に対して，次が成立する．

Theorem 2 (跡公式) 双曲的不連続部分群 Γ の基本領域 $\mathcal{F}$ がコンパクトで，Hilbert-Schmidt 積分作用素 T が非負定値であるとき，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n &= f(0)\mu(\mathcal{F}) + C(f)\sum_{\{\gamma\}:\text{torsion}} h_\gamma j_\gamma \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{[\gamma_0]:\text{primitive}}\sum_{m=1}^{\infty}\log_p(l(\gamma_0))\left(f\circ\psi^{-1}\left(l(\gamma_0)^m\right)\right. \\ &\qquad\left. +\left(1-p^{-1}\right)\sum_{k=1}^{\infty}p^k f\circ\psi^{-1}\left(l(\gamma_0)^m p^{2k}\right)\right).\end{aligned}$$

ただし，左辺は T のすべての固有値の重複度をこめた和，右辺第 2 項の和は Γ の torsion の共役類について，第 3 項の 1 つめの和は primitive な元の上で定めた同値関係 $\sim$ についての類についてとる．

3 素測地線定理

一般に集合 S 上の確率過程 X_t, $t\in[0,+\infty)$, は任意の $0\le s_1<s_2<\cdots<s_n<t$, S の可測集合 B, $x_1,x_2,\ldots,x_n\in S$ に対して

$$P(X_t\in B \mid X_{s_1}=x_1, X_{s_2}=x_2,\ldots,X_{s_n}=x_n) = P(X_t\in B\mid X_{s_n}=x_n)$$

をみたすとき，**Markov 過程**という．ここに，$P(E_1|E_2)$ は 事象 E_2 の下での事象 E_1 の条件付確率を表す．さらに，任意の $s,t\ge 0$, S の可測集合 B, $x\in S$ に対して

$$P(X_{t+s}\in B\mid X_s=x) = P(X_t\in B\mid X_0=x) =: P_t(x,B)$$

が成り立つとき，X_t は**時間的に一様**であるという．

X_t を H 上の時間的に一様な Markov 過程とする．このとき，各 $t\ge 0$ に対して X_t の**推移作用素**を $T_t\phi(\cdot) := \int_H \phi(y)P_t(\cdot,dy)$ とすると，$\{T_t\}_{t\ge 0}$ は半群の性質 $T_tT_s = T_{t+s}$, $\lim_{t\to 0}T_t = \mathrm{id}$, をみたし，**生成作用素** $-A$, $T_t = \mathrm{e}^{-tA}$, がとれる．

さて，H 上の時間的に一様な Markov 過程について次が成り立つ．

Proposition 3 $\mathbf{Z}$ を添え字とする非負実数列 $\{c(n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ であって $\sum_{n\geq 0} c(n) < \infty$ をみたすものが与えられたとき，H 上の時間的に一様な Markov 過程であって，

$$-A\phi(\cdot) = \int_H (\phi(w) - \phi(\cdot))\rho(d(\cdot, w))\mu(dw),$$

ただし $\rho(r_n) := (1 - p^{-1})\, p^{-2n} c(n)$, を生成作用素とするものが存在する．任意の $z \in H$ に対してその推移確率 $P_t(z, \cdot)$ は測度 μ に対して絶対連続，$P_t(z, dw) = p_t(z, w)\mu(dw)$, であって，**密度関数** p_t は 2 点間の距離のみの関数 $p_t(z, w) = f_t(d(z, w))$ である．

さて，Γ はその基本領域 $\mathcal{F}$ がコンパクトであるような G の双曲的不連続部分群であるとする．数列 $\{c(n)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ が上の命題により定義する H 上の Markov 過程を X_t, その推移確率を P_t とするとき，

$$\tilde{P}_t(z, B) := \sum_{\gamma\in\Gamma} P_t(z, \gamma B), \quad z \in \mathcal{F},\ B \text{ は } \mathcal{F} \text{ の可測集合},$$

を推移確率とする $\mathcal{F}$ 上の時間的に一様な Markov 過程が構成される．$\tilde{P}_t$ は μ に対して密度関数 $\tilde{p}_t(z, w) = \sum_{\gamma\in\Gamma} p_t(z, \gamma w)$ をもち，対応する推移作用素

$$\tilde{T}_t\xi(\cdot) = \mathrm{e}^{-t\tilde{A}}\xi(\cdot) = \int_{\mathcal{F}} \tilde{p}_t(\cdot, w)\xi(w)\mu(dw)$$

は Theorem 2 (跡公式) の仮定をみたす Hilbert-Schmidt 積分作用素である．$\tilde{T}_t$ に跡公式を適用するのだが，まずは左辺を調べるため，生成作用素 $-\tilde{A}$ の固有値を求める．

負の整数 l に対して，H の中の半径 r_l の球で $\mathcal{F}$ と交わりをもつものの個数を d_l とする．これらの球は互いに交わりをもたず，また $\mathcal{F}$ はコンパクトと仮定しているから，d_l は自然数である．半径 r_0 の球で $\mathcal{F}$ と交わりをもつものを $B_1^{(0)}, B_2^{(0)}, \ldots, B_{d_0}^{(0)}$ とし，それぞれの中心を $x_1, x_2, \ldots, x_{d_0}$ とおく．各 $j = 1, 2, \ldots, d_0$ に対し，$B_j^{(0)} \cap \mathcal{F}$ と交わりをもつ半径 r_{-1} の球の個数を M_j とし，$i, j = 1, 2, \ldots, d_0$ に対して

$$q_{ij} := M_j \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{-2(n+1)} \sharp\{\gamma \in \Gamma\ ;\ d(x_i, \gamma x_j) = r_n\}\, c(n) + p^{-2} c(0)\delta_{ij} \right)$$

とおき，$d_0 \times d_0$ 実行列 $Q = (q_{ij})_{1\leq i,j\leq d_0}$ の固有値を重複度もこめて $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{d_0}$ とする．q_{ij} は Markov 過程を与える数列 $\{c(n)\}$ に依存しているから，行列 Q，したがってその固有値 β_k は部分群 $\Gamma \subset G$ と Markov 過程 X_t に依存して決まる．

Proposition 4 $\tilde{A}$ の固有値は次の $\sigma_l,\ l \le -1$, と $\theta_k,\ 1 \le k \le d_0$, で与えられる；負の整数 l に対して

$$\sigma_l := -p^{-1}c(0) + c(l+1) + \left(1-p^{-2}\right)\sum_{n=l+2}^{\infty} c(n),$$

重複度はそれぞれ $d_l - d_{l+1}$ である．$1 \le k \le d_0$ に対して

$$\theta_k := -\beta_k + \left(1-p^{-1}\right)c(0) + \left(1-p^{-2}\right)\sum_{n=1}^{\infty} c(n).$$

次に，跡公式の右辺について考察するが，Proposition 3 で存在が示された密度関数 p_t を具体的に求めることは一般には出来ない．ここでは，p_t，またはその Laplace 変換が求められる特別な場合を考えることにする．

(case 1) $\forall n \ge 1$ に対して $c(n) = 0$ の場合
この場合には $p_t(z,w) = f_t(d(z,w))$ が具体的に計算され，それと Proposition 4 で求めた生成作用素 $-\tilde{A}$ の固有値を代入することにより，次の等式を得る．

$$\begin{aligned}&\sum_{l\le -1}(d_l - d_{l+1})\mathrm{e}^{-t\sigma_l} + \sum_{k=1}^{d_0}\mathrm{e}^{-t\theta_k}\\ &= \mu(\mathcal{F})\left(\left(1-p^{-1}\right)^2\left(1+p^{-1}\right)\sum_{l\le -2}p^{-2l}\mathrm{e}^{-t\sigma_l} + \left(p^2-p-1\right)\mathrm{e}^{-t\sigma_{-1}} + 1\right)\\ &\qquad\qquad + 2(p-1)^{-1}\sum_{\{\gamma\}:\mathrm{torsion}} h_\gamma j_\gamma\left(1-\mathrm{e}^{-t\sigma_{-1}}\right).\end{aligned}$$

この場合には，素測地線の長さに関係する跡公式の右辺第 3 項は 0 となり，上式には現れていない．$t \to +\infty$ とした極限を見ることにより，torsion に関する式

$$d_0 = \mu(\mathcal{F}) + 2(p-1)^{-1}\sum_{\{\gamma\}:\mathrm{torsion}} h_\gamma j_\gamma$$

を得る．

(case 2) $c(0) = 0,\ c(1) = 1,\ \forall n \ge 2$ に対して $c(n) = 0$, の場合
この場合には，密度関数 $p_t(z,w) = f_t(d(z,w))$ の具体形を得ることは難しいが，Laplace 変換

$$\pi_n(\alpha) := \int_0^{\infty} f_t(r_n)e^{-\alpha t}dt, \quad \alpha > 0,\ n \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty\},$$

が計算される．跡公式の両辺を Laplace 変換した式に代入して，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l\le -1}\frac{d_l-d_{l+1}}{\sigma_l+\alpha}+\sum_{k=1}^{d_0}\frac{1}{\theta_k+\alpha}\\
&=\pi_{-\infty}(\alpha)\mu(\mathcal{F})+\frac{2}{p-1}\sum_{\{\gamma\}:\text{torsion}}h_\gamma j_\gamma\left(\pi_0(\alpha)+\left(1-p^{-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}p^n\pi_n(\alpha)\right)\\
&\quad+\sum_{[\gamma_0]:\text{primitive}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log_p l(\gamma_0)}{2}\left(\pi_{mj_{\gamma_0}}(\alpha)+\left(1-p^{-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}p^n\pi_{mj_{\gamma_0}+n}(\alpha)\right)
\end{aligned}
$$

を得る．この場合には，跡公式の torsion に関する第 2 項，素測地線の長さに関する第 3 項ともに非自明な項として現れている．

(case 1) と (case 2) で得た式を併せることにより，素測地線の分布の表示式を導く．行列 Q を定義したときと同様にして，$d_0\times d_0$ 行列 $P=(p_{ij})_{1\le i,j\le d_0}$ を次で定義する;

$$
p_{ij}:=\frac{M_j}{p(p-1)(p+1)^2}\sharp\{\gamma\in\Gamma\ ;\ d(x_i,\gamma x_j)=r_1\}+(p+1)^{-1}\delta_{ij}.
$$

p_{ij} は Markov 過程を定める数列 $\{c(n)\}$ には無関係に与えられているから，P は Γ の幾何的性質のみから定まる行列である．$p_{ij}\ge 0$, また各 i について $\sum_{1\le j\le d_0}p_{ij}=1$ が成立し，P は有限集合 $\left\{B_i^{(0)}\right\}_{1\le i\le d_0}$ 上の Markov 連鎖の推移確率行列とみなすことができる．行列 P は最大固有値 1 をもつ．P の固有値を重複度もこめて $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{d_0}$ とし，有理関数 G を

$$
G(s):=\sum_{k=1}^{d_0}\frac{\left(p^{-1}-s\right)\left(p^{-1}+s\right)}{s^2+\left(-\left(1+p^{-1}\right)^2\delta_k+2p^{-1}\right)s+p^{-2}}+\frac{p^{-1}d_{-1}s}{1-s}-d_0,\quad s\in\mathbf{C},
$$

で定義する．(case 1), (case 2) で得た式を torsion の項が相殺するよう足し合わせ，整理すると，

$$
\begin{aligned}
G(s)&=\sum_{N=1}^{\infty}N\sharp\left\{[\gamma_0]:\text{torsion}\ ;\ l(\gamma_0)=p^{2N}\right\}\frac{s^N}{1-s^N}\\
&=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{N|r}N\sharp\left\{[\gamma_0]:\text{torsion}\ ;\ l(\gamma_0)=p^{2N}\right\}s^r
\end{aligned}
$$

を得る．すなわち，$\rho(r):=\sum_{N|r}N\sharp\left\{[\gamma_0]:\text{torsion}\ ;\ l(\gamma_0)=p^{2N}\right\}$ の母関数が $G(s)$ であるから，

$$
\rho(r)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C\frac{G(s)}{s^{r+1}}ds,\quad r\ge 1,
$$

である．ここに，C は複素平面の原点を中心とし，内部に $G(s)$ の極を含まない十分小さな円周である．さらに Möbius の反転公式を用いることにより，次を得る．

Theorem 5 (素測地線定理)

$$\sharp\left\{[\gamma_0] : \text{torsion} \ ; \ l(\gamma_0) = p^{2N}\right\} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}N} \sum_{k|N} m\left(\frac{N}{k}\right) \int_C \frac{G(s)}{s^{k+1}} ds, \quad N \geq 1.$$

ここに，$m(n), n \in \mathbf{Z}$, は Möbius 関数

$$m(n) := \begin{cases} 1, & \text{if } n = 1, \\ 0, & \text{if } q^2|n, \ \exists q : \text{素数}, \\ (-1)^h, & \text{if } n = q_1 q_2 \cdots q_h, \ q_1, q_2, \ldots, q_h \text{ は異なる素数}, \end{cases}$$

である．

この定理から，素測地線の長さの分布の漸近的挙動を調べることができる．たとえば，有理関数 $G(s)$ の原点から最も近い極での様子を解析することにより，次が導かれる．

Corollary 6

$$\sharp\left\{[\gamma_0] : \text{torsion} \ ; \ l(\gamma_0) = p^{2N}\right\} \sim N^{-1} p^{2N} \left(h_1 + (-1)^N h_2\right), \quad N \to \infty.$$

ここに，h_1 は行列 P の最大固有値 1 の重複度，また，P が固有値 $-(p+1)^{-2}(p-1)^2$ を固有値にもつときはその重複度を h_2, もたないときは $h_2 = 0$ とする．

上の系において，$F_1(N) \sim F_2(N)$, $N \to \infty$, とは $\lim_{N\to\infty} F_1(N)/F_2(N) = 1$ なることを意味する．$G(s)$ の極についてさらに詳しく解析することにより，帰納的に誤差項を任意の精度で評価することができる．

4 伊原のゼータ関数

$u \in \mathbf{N}$ に対して

$$Z_\Gamma(u) := \prod_{[\gamma_0]:\text{primitive}} \left(1 - u^{\log_p l(\gamma_0)}\right)^{-1}$$

とおく．これは，Γ が torsion-free であるときには有限グラフのゼータ関数として知られる，伊原のゼータ関数である．Theorem 5 から，このゼータ関数の積分表示，さらに行列式表示を導くことができる．

Corollary 7

$$\begin{aligned} Z_\Gamma(u) &= \exp\left(\sum_{m\geq 1}\frac{u^{2m}}{2\pi\sqrt{-1}m}\int_C \frac{G(s)}{s^{m+1}}ds\right) \\ &= \left(1-u^2\right)^{-p^{-1}d_{-1}} \det\left(I+u^2R+u^4p^2I\right)^{-1}. \end{aligned}$$

ここに，R は $R := -(p+1)^2P + 2pI$ で定義される $d_0 \times d_0$ 行列である．

これからさらに，次の関数等式が容易に示される．

Corollary 8 $W(u) := (1-u^2)^{p^{-1}d_{-1}}u^{2d_0}$, $u \in \mathbf{C}$, とおくと，

$$Z_\Gamma(u)W(u) = Z_\Gamma\left(\frac{1}{pu}\right)W\left(\frac{1}{pu}\right).$$

変数変換 $u = p^{-s}$ により

$$Z_\Gamma\left(p^{-s}\right) = \prod_{[\gamma_0]:\mathrm{primitive}} \left(1-l(\gamma_0)^{-s}\right)^{-1}$$

を $s \in \mathbf{C}$ の関数とみなす．Z_Γ は零点をもたないが，その逆数は零点をもち，このゼータ関数に対する Riemann 予想の類似は次のように述べられる：

(R) $Z_\Gamma\left(p^{-s}\right)^{-1} = 0$ かつ $\mathrm{Re}\, s \in (0,1)$ ならば, $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ である．

Corollary 7 から，次が導かれる．

Proposition 9 (R) は次と同値である；
行列 P の固有値 δ_k のうち，$\delta_k \neq 1$, $-(p+1)^{-2}(p-1)^2$ なるものがすべて $0 \leq \delta_k \leq 4p(p+1)^{-2}$ をみたす．

次に，Γ が torsion-free である場合を考える．このとき Z_Γ はある $(p+1)$-正則グラフ X のゼータ関数であり，X の隣接行列 A を用いた表示

$$Z_\Gamma(u)^{-1} = \left(1-u^2\right)^{n(p-1)/2}\prod_{l=1}^{n}\left(pu^2-\theta_l u+1\right),$$

ただし，n は X の頂点の個数，$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ は行列 A の固有値，が知られている．一方我々の Corollary 7 からは

$$Z_\Gamma(u)^{-1} = \left(1-u^2\right)^{p^{-1}d_0}\prod_{k=1}^{d_0}\left(p^2u^4 + \left(-(p+1)^2\delta_k + 2p\right)u^2 + 1\right)$$

を得る．両者を比較すると，

$$n = 2d_0,\ \delta_k \geq 0,\ \{\theta_l\}_{1\leq l\leq n} = \{\pm(p+1)\sqrt{\delta_k}\}_{1\leq k\leq d_0},$$

なることがわかる．特に，グラフ X は bipartite である．また，このときには命題 (R) の成立条件は，次のように P を推移確率行列とする $\left\{B_i^{(0)}\right\}_{1\leq i\leq d_0}$ の上の Markov 連鎖の一様分布への収束の早さを用いて記述される．

Corollary 10 (R) は次と同値である；
集合 $\left\{B_i^{(0)}\right\}_{1\leq i\leq d_0}$ 上の任意の分布（初期分布）ν_0 に対して，

$$\|P^n\nu_0 - 1/d_0\|_{L^2} = O\left(\left(4p/(p+1)^2\right)^n\right), \quad n\to\infty.$$

References

[1] S. Albeverio, W. Karwowski: A random walk on p-adics – the generator and its spectrum, Stochastic Process. Appl. **53** (1994), 1–22.

[2] I. M. Gel'fand, M. I. Graev, I. I. Pyatetskii-Shapiro: Representation theory and automorphic functions, Generalized Functions **6**, Academic Press, 1990.

[3] K. Hashimoto: Zeta functions of finite graphs and representations of p-adic groups, Automorphic Forms and Geometry of Arithmetic Varieties, Adv. Stud. Pure Math. **15** (1989), Academic Press, 211–280.

[4] K. Hashimoto, A. Hori: Selberg-Ihara's zeta function for p-adic discrete groups, Automorphic Forms and Geometry of Arithmetic Varieties, Adv. Stud. Pure Math. **15** (1989), Academic Press, 171–210.

[5] Y. Ihara: On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields, J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 219–235.

[6] H. P. McKean: Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surface, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), 225–246.

[7] J.-P. Serre: Trees, Springer-Verlag, 1980.

[8] A. Terras: Fourier analysis on finite groups and applications, London Mathematical Society Student Texts **43**, Cambridge University Press, 1999.

[9] K. Yasuda: Trace Formula on the p-adic upper half-plane, J. Funct. Anal. **216** (2004), 422–454.